ŞCOALA GIMNAZIALĂ ”MIHAI EMINESCU„ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

Concurs Interjudețean de Matematică ,

, Matematica pentru toți „

Ediția a III – a – Clasa a V-a

Roman 30.03.2017

Varianta 2

1. Aflați patru numere naturale știind că suma lor este egală cu 55, primul număr este jumătate din cel de-al doilea, al treilea număr este media aritmetică a primelor două, iar al patrulea număr este dublul diferenței dintre al doilea și al treilea.

2. În câte moduri se poate scrie mulțimea $M = \{1,2,3, \dots ,9\}$ ca o reuniune de trei mulțimi disjuncte cu aceeași sumă a elementelor? Dar dacă, în plus, se cere ca mulțimile să aibă același cardinal?

3. Se consideră numărul $N = a+3+15+b+35$, unde termenii sunt scriși în ordine crescătoare. Determinați a și b pentru care N este pătrat perfect.

4. Demonstrați că: $3^{5001}+4^{4001} < 7^{3001}$

Varianta 2 . Barem – Clasa a V-a

1. b = 2a …………………………………………………………………...1 punct
   c = 1,5 a……………………………………………………………………2 puncte
   d = a……………………………………………………………………..1 punct
   11 a = 110…………………………………………………………………….2 puncte
   a =10, b = 20, c = 15, d = 10…………………………………………………1 punct

2. 1 + 2 +……+ 9 = 45…………………………………………………………1 punct
   Suma elementelor din fiecare mulțime este 15…………………………….1 punct
   Submulțimile sunt: {9,6}, {8,7}, {1,2,3,4,5} sau {4,5,6}, {8,7}, {1,2,3,9} sau {9,2,4}, {8,7}, {1,3,6,5} sau {9,1,5}, {8,7}, {2,3,4,6} sau {9,6}, {3,5,7}, {1,2,4,8} sau {9,6}, {8,2,5}, {1,3,4,7} sau {9,6}{8,3,4}, {1,2,5,7}*sau*{9,2,4}, {8,1,6}, {3,5,7}sau{9,1,5}{2,6,7}{3,4,8}
   Deci există 9 moduri de formare a mulțimilor…………………………….4 puncte
   Există două moduri pentru care mulțimile au același cardinal……………1 punct

3. a < 3……………………………………………………………………..1 punct
   15< b< 35…………………………………………………………………1 punct
   68< N< 91…………………………………………………………...3 puncte
   N = 81 ……………………………………………………………………..1 punct
   Soluții: a = 0 și b = 28 sau a = 1 și b = 27 sau a = 2 și b = 26……………..1 punct

4. Relația din enunț este echivalentă cu $3\cdot3^{5000} + 4\cdot4^{4000} < (3 + 4)\cdot7^{3000}$……1 punct
   $3\cdot3^{5000} < 3\cdot7^{3000}$…………………………………………………………..2 puncte
   $4\cdot4^{4000} < 4\cdot7^{3000}$……………………………………………………………2 puncte
   $3\cdot3^{5000} + 4\cdot4^{4000} < 3\cdot7^{3000} + 4\cdot7^{3000}$…………………………………….....1 punct
   Finalizare…………………………………………………………………1 punct

ȘCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU" ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

Concurs Interjudețean de Matematică ,

, Matematica pentru toți „

Ediția a III – a

Roman 30.03.2017

Varianta 2

Clasa a VI - a

1. a) Arătați că fracția $\frac{7^{n+2}\cdot 2^{2n}+4^{n+2}\cdot 7^{n}+2^{2n+1}\cdot 3\cdot 7^{n}}{4^{2n}\cdot 7^{2n+1}+4^{2n+3}\cdot 7^{2n}}$ se simplifică cu 1988, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

   b) Să se arate că fracția $\frac{4\cdot 2002^{n}+5}{5\cdot 2002^{n}+6}$ este ireductibilă,oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinați numerele prime x, y, z care îndeplinesc condiția:
$$\frac{x}{2(y+z)}=\frac{y}{4(z+x)}=\frac{z}{7(x+y)}=\frac{15}{8(x+y+z)}.$$

3. Fie unghiurile $\sphericalangle(X_0OX_1), \sphericalangle(X_1OX_2), \sphericalangle(X_2OX_3), \sphericalangle(X_3OX_4), \dots, \sphericalangle(X_{n-1}OX_n)$, adiacente două câte două cu măsurile de $\frac{195^0}{2}, \frac{195^0}{6}, \frac{195^0}{12}, \frac{195^0}{20}, \dots, \frac{195^0}{n(n+1)}$ .Să se determine $n \in \mathbb{N}$, astfel încât punctele X_0, O, X_n să fie coliniare.

4. Se dau unghiurile $\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle BCA$ astfel încât punctele D și B sunt de o parte și de alta a dreptei AC,$\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BCA$ și $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle BAC$. Fie punctele $M \in (DC), N \in (AB)$ cu proprietatea $[DM] \equiv [BN]$, $MN \cap AC = \{O\}$.
   a) Arătați că $[AM] \equiv [CN]$.
   b) Demonstrați că punctul O este mijlocul $[MN]$ și $[AC]$.

ŞCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU" ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamţ
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

Barem de notare varianta II clasa a VI-a

1. a) $7^{n+2}\cdot 2^{2n}+4^{n+2}\cdot 7^{n}+2^{2n+1}\cdot 3\cdot 7^{n}=28^{n}\cdot 71$ ……………………………1,5 p
   $4^{2n}\cdot 7^{2n+1}+4^{2n+3}\cdot 7^{2n}=28^{2n}\cdot 71$
   $1998=28\cdot 71$………………………………………………………………..1,5 p
   Finalizare ……………………………………………………………………...1 p
   b) R.A.
   Pp. $d/(4\cdot 2002^{n}+5)$
   $d/(5\cdot 2002^{n}+6)$…………………………………………………………...1 p
   $d/[5(4\cdot 2002^{n}+5)-4(5\cdot 2002^{n}+6)]$…………………………………...1 p

$d/1$, deci fracţie ireductibilă…………………………………………………..…1 p

2. $\frac{x}{2(y+z)}=\frac{y}{4(z+x)}=\frac{z}{7(x+y)}=\frac{14x}{28y+28z}=\frac{7y}{28z+28x}=\frac{4z}{28x+28y}=$
   $\frac{14x+7y+4z}{56x+56y+56z}=\frac{14x+7y+4z}{56(x+y+z)}=\frac{15}{8(x+y+z)}$……………………………….....2 p
   $14x+7y+4z=7\cdot 15$ ……………………………………………………………....1 p
   $14x$şi $7y$ se divid cu 7, deci $4z$ se divide cu 7. Dar z este număr prim$\Rightarrow z=7$ ….2 p
   $2x+y=11\Rightarrow x=3\,,y=5$ sau $x=2,y=7$…………………………………..2 p
3. X_0,O,X_n să fie coliniare$\Rightarrow m(\sphericalangle X_0OX_n)=180^0$...1 p
   $m(\sphericalangle X_0OX_1)+m(\sphericalangle X_1OX_2)+m(\sphericalangle X_2OX_3)+\cdots+m(\sphericalangle X_{n-1}OX_n)=180^0$…….1 p
   $\frac{195^0}{2}+\frac{195^0}{6}+\frac{195^0}{12}+\frac{195^0}{20}+\cdots+\frac{195^0}{n(n+1)}=180^0$...1 p
   $195^0\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=180^0$..1 p
   $1-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{13}$ ....2 p
   $n=12$ ....1 p
4. a) $\Delta DAC\equiv\Delta BCA\,(U.L.U.)\Rightarrow DA=BC,DC=BA,\sphericalangle ADC\equiv\sphericalangle CBA$……………..1,5 p
   $\Delta ADM\equiv\Delta CBN(L.U.L.)\Rightarrow AM=CN$…………………………………………………..1,5 p

   b)$DM=BN$, deci $MC=DC-DM=AB-NB=AN\Rightarrow MC=AN$………………..1 p

   $\Delta AMN\equiv\Delta CNM(\,L.L.L.)\Rightarrow\sphericalangle ANM\equiv\sphericalangle CMN$...1 p

   $\Delta ANO\equiv\Delta CMO(U.L.U.)\Rightarrow MO=ON$...1 p

   $MO=ON,AO=OC\Rightarrow$punctul O este mijlocul $[MN]$ şi $[AC]$ ……………..………..1 p

ȘCOALA GIMNAZIALĂ ”MIHAI EMINESCU„ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

Concurs Interjudețean de Matematică ,

, Matematica pentru toți „

Ediția a III – a

Roman 30.03.2017

Varianta 2

Clasa a VII - a

1) a)Fie $a, b, c \in R^*$,astfel încât $a + b + c = 0$.
Demonstrați că $\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right|$.
b) Demonstrați că numărul :
$x = \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}}$ este rațional.

2) Fie a și b numere reale. Arătați că :
   a) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$
   b) $(a^2 - b^2)^2 + 2ab(ab - 3) + \frac{9}{2} \geq 0$.

3) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 30^\circ$ se construiește bisectoarea unghiului C, care intersectează latura AB în punctul D. Prin D se construiește $DE \perp BC, E \in BC$ și prin E se duce $EF \parallel CD, F \in AB$. Știind că AB=36 cm, calculați lungimea segmentului EF

4) Fie ABCD trapez dreptunghic $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ, AB < CD$ și $AC \perp BD$. Punctele M și N sunt simetricelepunctelor D și C față de punctul de intersecție a diagonalelor, iar$MP \perp CD, P \in AC$.
   a) Arătați că MADP este romb
   b) Demonstrați că $MA \perp ND$ și $BP \perp PD$.

ȘCOALA GIMNAZIALĂ ”MIHAI EMINESCU„ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

BAREM: clasa a VII-a Varianta 2

1) a)Ridicarea la pătrat a relației cerute………………………..1p
$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cb}+\frac{1}{ac}\right)$……………..1p
Finalizare ………..1p
b)Aplicarea punctului a) pentru fiecare termen …3p
Calculul lui $x=\frac{42}{5}\in Q$…………..1p

2) a) $2a^2+2b^2\geq a^2+2ab+b^2$............1$p$
Finalizare $\left(a-b\right)^2\geq 0$...........1p
b)Înmulțind inegalitatea cu 2 și efectuăm calculele:
$2(a^4+b^4)+9\geq 12ab$................1p
Din a) avem $2(a^4+b^4)\geq\left(a^2+b^2\right)^2$............1$p$
Implică $2\left(a^4+b^4\right)+9\geq 4a^2b^2+9$.........1$p$
$4a^2b^2+9\geq 2\cdot 2ab\cdot 3=12ab$..........1$p$
Finalizare ………………………..1p

3) Desen ………………1p
$m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)=30^\circ$ implică BC=2AC……..1p
Teorema bisectoarei $\Rightarrow\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC},\frac{AD}{BD}=\frac{1}{2}$...............................1p
$\frac{AD+BD}{BD}=\frac{3}{2}$.,.............., $BD=24$ cm................1p
$\triangle BCD-isoscel, DC=BD=24cm$...............1$p$
EF- linie mijlocie în triunghiul BCD……….1p
Finalizare EF=12 cm…….1p

4) a)Desen …………..1p
Justificare $AD\parallel MP$.............1p
$\triangle AOD\equiv\triangle POM$...............1$p$
Finalizare ADPM- romb……..1p
b) A – ortocentrul triunghiului DMN, $MA\perp ND$ ………….1p
MD –mediatoare a lui AP, $B\in DM$,$\left[BA\right]\equiv\left[BP\right]$….1p
Justificare $m\left(\sphericalangle BPD\right)=90^\circ$, $BP\perp DP$ …………….1p

ŞCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU" ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

Concurs Interjudețean de Matematică

,, Matematica pentru toți ,,

Ediția a III – a

Roman 30.03.2017

Varianta 2

Clasa a VIII - a

1. Fie x,y∈ R, astfel încât $3x+2y - 1 = 0$ și $x\in[-1, 3]$.
   a. Să se calculeze: $A = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25}$.
   b. Să se arate că $x^4+y^4\geq x^3y+xy^3$, oricare ar fi x,y ∈ R

2. Fie expresia $E(x)=x^4-x^3+x^2-3x+2$.
   a. Arătați că $E(x)\geq 0$ oricare ar fi x∈ R
   b. Determinați a∈ Z astfel încât, E(a) să fie pătrat perfect

3. În planul α se consideră punctele A,B,C,D cu AB = CD = x, BC = DA = y și $m(\measuredangle DAB)=45^0$. Fie O∈ (AC)și P un punct al perpendicularei ridicate din O pe planul (ABCD). Proiecțiile lui P pe laturile AB, BC, CD, și DA se notează cu E, F, G și H, respectiv:
   a. HE ∥ GF .
   b. Să se calculeze Aria patrulaterului EFGH

4. Trei fețe ale unui paralelipiped dreptunghic au ariile direct proporționale cu numerele 3,5,15. Dacă aria totală este $184cm^2$, aflați volumul paralelipipedului și lungimea diagonalei acestuia.

ȘCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU„ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

VARIANTA 2 BAREM Clasa a VIII-a

5. Fie xy ∈ R, astfel încâtt 3x+2y – 1 = 0 și x ∈ [-1, 3].
   c. A = $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}$. $(\mathbf{1\ punct})$
   $=\sqrt{(x+1)^2+9/4(x+1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+9/4(x-3)^2}$. $(\mathbf{2\ puncte})$
   $=\sqrt{13}/2(x+1)+\sqrt{13}/2(x-3)=2\sqrt{13}$ $(\mathbf{1\ punct})$
   d. $X^4-x^3y-xy^3+y^4=x^3(x-y)-y^3(x-y)=(x-y)(x^3-y^3)$
   $(x-y)^2(x^2+xy+y^2)\geq 0$ **(2 puncte)**
   $x^2+xy+y^2=1/2(x^2+(x+y)^2+y^2)$ $(\mathbf{1\ punct})$
6. Fie expresia $E(x)=x^4-x^3+x^2-3x+2$.
   c. $E(x)=(x-1)^2[(x+1/2)^2+7/4]\geq 0$ oricare ar fi x ∈ R **(2puncte)**
   d. a ∈ Z $\Longrightarrow$ $E(a)=a^4-a^3+a^2-3a+2=(a-1)^2(a^2+a+2)$ pătrat perfect dacă și numai dacă a^2+a+2 este pătrat perfect **(2 puncte)**
   deoarece $a^2<a^2+a+2<(a+1)^2$, oricare ar fi a<1 și $(a+1)^2<a^2+a+2<a^2 \Longrightarrow a\in\{-2,-1,0,1\}$ **(2 puncte)**
   Din verificarea lui a rezultă a∈{-2,1} **(1 punct)**
7. În planul α se consideră punctele A,B,C,D cu AB = CD = x, BC = DA = y și m(∡DAB)=45^0. Fie O∈ (AC)și P un punct al perpendicularei ridicate din O pe planul (ABCD). Proiecțiile lui P pe laturile AB, BC, CD, și DA se notează cu E, F, G și H, respectiv:
   c. ABCD – paralelogram **(1 punct)**
   Proiecțiile lui P pe laturile paralelogramului sunt proiecțiile lui O pe laturi **(1 punct)**
   Cum GOFC și OHAE – inscriptibile și AB ∥ CD ⟹ GE ∥ HE **(2 puncte)**
   d. $A_{EFGH}=1/2GE\cdot HF\cdot \sin(\measuredangle HOE)$ **(1 punct)**
   $A_{EFGH}=1/2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{xy\sqrt{2}}{8}$ **(2 puncte)**
8. Trei fețe ale unui paralelipiped dreptunghic au ariile direct proporționale cu numerele 3,5,15. Dacă aria totală este 184cm^2, aflați volumul paralelipipedului și lungimea diagonalei acestuia.
   Fie a,b,c, dimensiunile paralelipipedului. În conformitate cu enunțul, cele trei fețe fețe sunt dreptunghiuri și au dimensiunile câte două din dimensiunile paralelipipedului. Ariile celor trei fețe sunt a·b,b·c, respectiv c·a. Atunci: A_{lot}
   $\frac{a\cdot b}{3}=\frac{b\cdot c}{5}=\frac{c\cdot a}{15}=\frac{a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a}{3+5+15}=\frac{\frac{1}{2}A_{lot}}{15}=\frac{92}{43}=4$ **(2puncte)**
   c· a =60 înmulțind cele trei egalități $a^2\cdot b^2\cdot c^2$= 14400, V = 120 cm^3 **(2 puncte)**
   c· $b\cdot c=120$ și a· $b=12$ rezultă c=10; c· $b\cdot c=120$ și b· $c=20$ rezultă a=6; c· $b\cdot c=120$ și a· $c=60$ rezultă b=2; d=$\sqrt{a2+b2+c2}=2\sqrt{35}$ **(3 puncte)**