ȘCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU,,ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN NEAMȚ

romania2019.eu
Președinția României la Consiliul Uniunii Europene

BAREM DE CORECTARE

Clasa a V-a

Varianta 1

1. a) Comparați $3^2 + 4^2$ *cu* 5^2 .
b) Arătați că $3^{2018} + 4^{2018} < 5^{2018}$

....

a) $3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$ — 1 punct

b) $5^{2018} = 5^2 \cdot 5^{2016} = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{2016} = 3^2 \cdot 5^{2016} + 4^2 \cdot 5^{2016}$ — 3 puncte

$3^{2018} = 3^2 \cdot 3^{2016} < 3^2 \cdot 5^{2016}$ — 1 punct

$4^{2018} = 4^2 \cdot 4^{2016} < 4^2 \cdot 5^{2016}$ — 1 punct

$3^{2018} + 4^{2018} < 3^2 \cdot 5^{2016} + 4^2 \cdot 5^{2016} = 5^{2018}$. — 1 punct

2.a) Arătați că numărul 10^n se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi n ∈ ℕ.

b) Determinați numerele natural a și b care verifică relația $5^{a^2+b+3} - 5^{a^2+1} = 600$.

....

a) Dacă n = 2k, k ∈ ℕ, atunci avem: $10^{2k} = 10^{2k-2+2} = 10^{2k-2} \cdot 10^2 = 10^{2k-2} \cdot (6^2 + 8^2) =$
$= 10^{2k-2} \cdot 6^2 + 10^{2k-2} \cdot 8^2 = 10^{2(k-1)} \cdot 6^2 + 10^{2(k-1)} \cdot 8^2 = (10^{k-1} \cdot 6)^2 + (10^{k-1} \cdot 8)^2$. (1) — 1p

Dacă n = 2k + 1, k ∈ ℕ, atunci avem: $10^{2k+1} = 10^{2k} \cdot 10 = 10^{2k} \cdot (1^2 + 3^2) =$ — 2p
$= 10^{2k} \cdot 1^2 + 10^{2k} \cdot 3^2 = (10^k \cdot 1)^2 + (10^k \cdot 3)^2$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că 10^n se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte, oricare ar fi n ∈ ℕ.

b) $5^{a^2+b+3} - 5^{a^2+1} = 600 \Rightarrow 5^{a^2+1} \cdot (5^{b+2} - 1) = 600 \Rightarrow 5^{a^2+1} \in \{5, 5^2, 5^3\}$. — 1p

Dacă $5^{a^2+1} = 5 \Rightarrow a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$, iar $5^{b+2} - 1 = 120 \Rightarrow 5^{b+2} = 121$, fals. — 1p

Dacă $5^{a^2+1} = 5^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$, iar $5^{b+2} - 1 = 24 \Rightarrow 5^{b+2} = 5^2 \Rightarrow b = 0$. — 1p

Dacă $5^{a^2+1} = 5^3 \Rightarrow a^2 + 1 = 3 \Rightarrow a^2 = 2$ imposibil. — 1 p

3. Un număr natural n împărțit la 5 dă restul 2, iar împărțit la 6 dă restul 1. Aflați restul împărțirii lui n la 30.

……………………………………………………..

Aplicând teorema împărțirii cu rest obținem:

$n = 5 \cdot c_1 + 2 \ |\cdot 6 \Rightarrow 6\cdot n = 30\cdot c_1 + 12, c_1 \in \mathbb{N}$ 2 puncte

$n = 6 \cdot c_1 + 1 \ |\cdot 5 \Rightarrow 5\cdot n = 30\cdot c_1 + 5 , c_2 \in \mathbb{N}.$ 2 puncte

Scăzând cele două relații obținem:

$6\cdot n - 5\cdot n = 30\cdot c_1 - 30\cdot c_2 + 12 - 5 \Rightarrow n = 30\cdot(c_1 - c_2) + 7, 0 \leq 7 \leq 30.$ 3 puncte

Deci restul împărțirii lui n la 30 este 7.

4. Fie n ≥ 2 un număr natural. Spunem că numărul $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ este tripătrat dacă el este pătrat perfect și există k< n astfel încât $\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ și $\overline{a_{k+1} a_{k+2} \ldots a_n}$ sunt pătrate perfecte nenule.

a) Determinați tripătratele cu trei cifre.

b) Arătați că există o infinitate de tripătrate.

…………………………………………………………….

a) Pătratele perfecte de trei cifre: 100, 121, 144, … 961.
Dintre acestea numai 169 și 361 îndeplinesc condițiile ($169 = 13^2$, $16 = 4^4$, $9 = 3^2$ și $361 = 19^2$, $36 = 6^2$, $1 = 1^2$. 3 puncte

b) Observăm că $169\underbrace{00\ldots0}_{de\ 2k\ ori}$ verifică cerințele problemei
$169\underbrace{00\ldots0}_{de\ 2k\ ori} = (13\underbrace{00\ldots0}_{de\ k\ ori})^2$, $16 = 4^2$ și $9\underbrace{00\ldots0}_{de\ 2k\ ori} = (3\underbrace{00\ldots0}_{de\ k\ ori})^2$. 3 puncte
Analog pentru numerele de forma $361\underbrace{00\ldots0}_{de\ 2k\ ori}$
Cum k arbitrar există o infinitate de tripătrate. 1 punct