ȘCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU" ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamț
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

Barem de corectare

Clasa a VII - a

Varianta 1

Subiectul I

a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=4\sqrt{2}-8$. Demonstrați că

$|a+\sqrt{2}|+|b+4|+|c-3| \geq 5\sqrt{2}-7$.

b) Fie numerele naturale a, b, c direct proporționale cu $\overline{bc}, \overline{ca}$, respectiv $\overline{ab}$. Arătați că numărul

$$n=\sqrt{\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{3a}{a+b+c}+\frac{6b}{a+b+c}+\frac{9c}{a+b+c}\right)} \in \mathbb{N}\ .$$

Barem

a)

$$|a+\sqrt{2}|+|b+4|+|c-3| \geq |a+\sqrt{2}+b+4+c-3| = |a+b+c+\sqrt{2}+1| = |5\sqrt{2}-7|$$ **2 p**

Finalizare **1 p**

b)

$$\frac{a}{\overline{bc}}=\frac{c}{\overline{ab}}=\frac{b}{\overline{ac}}=\frac{a+b+c}{11(a+b+c)}=\frac{1}{11}$$ **1 p**

$11a=10b+c \Rightarrow c=11a-10b$ **1 p**

$11b=10c+a \Rightarrow a=11b-10c$

$11c=10a+b \Rightarrow b=11c-10a$

$a=b=c$ **1 p**

$$n=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{3}+\frac{6}{3}+\frac{9}{3}\right)}=\sqrt{\frac{3}{2}\cdot 6}=3 \in \mathbb{N}$$ **1 p**

Subiectul al II-lea

Demonstrați că nu există numerele naturale a, b, c $a>b>c$ cu proprietatea că $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=2^{2015}$.

Barem

Presupunem că există numere astfel încât relația să fie adevărată.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=ab(a-b)+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2$ **2 p**
$=ab(a-b)+c^2(a-b)-c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$

$(a-b)(b-c)(c-a)=2^{2015}$ există x, y, z ∈ N astfel încât x + y + z = 2015 și **2 p**
$a-b=2^x$, $b-c=2^y$, $a-c=2^z$ $rezult$ă $2^x+2^y=2^z$

Dacă $x \geq y$ rezultă că $x = y + t$, $t \in N$ **3 p**
$2^t(2^{z-y-t}-1)=1$, deci t = 0 x = y, z = x + 1
Dar x + y + z = 2015 rezultă 3x = 2014 fals

Subiectul al III-lea

Considerăm ΔABC și ΔACD, având latura comună AC și interioarele disjuncte. Notăm cu G_1, respectiv G_2 centrele de greutate ale celor două triunghiuri. Fie $P \in (AB), PG_1 \cap (AC)=\{Q\}$, $QG_2 \cap (AD)=\{R\}$.

a) Demonstrați că $\frac{PB}{PA}+\frac{CQ}{QA}=1$;

b) Arătați că $RP \parallel BD$.

Barem

a)

Fie $PQ \cap BC=\{O\}$m M mijlocul lui $[BC]$

Din ΔABM și $O-P-G_1 \Rightarrow (cf. T. Menelaus) \frac{MG_1}{G_1A}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BO}{OM}=1 \Rightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BO}{OM}=1 \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{2MO}{BO}$ **2 p**

Din ΔAMC și $O-G_1-Q \Rightarrow (cf. T. Menelaus) \frac{AG_1}{G_1M}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{MO}{OC}=1 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{MO}{OC}=1 \Rightarrow \frac{CQ}{QA}=\frac{CO}{2MO}$ **2 p**

$$\frac{BP}{PA}+\frac{CQ}{QA}=\frac{BO+CO}{2MO}=\frac{BO+BO+2BM}{2MO}=\frac{2(BO+BM)}{2MO}=\frac{2MO}{2MO}=1.$$ **1 p**

b)

Conform cu **a)** $\Rightarrow \begin{cases} \frac{PB}{PA}+\frac{CQ}{QA}=1 \\ \frac{DR}{RA}+\frac{CQ}{QA}=1 \end{cases}$ $-$ **1 p**

$$\frac{PB}{PA}=\frac{DR}{RA} \Rightarrow (cf. R. T. Thales)\ RP \parallel BD$$ **1 p**

Subiectul al IV-lea

Fie ΔABC dreptunghic în *A*, *AD* perpendicular pe *BC*, *DF* perpendicular pe *AB*, *DE* perpendicular pe *AC*, *FG* perpendicular pe *BC*, *EH* perpendicular pe *BC*. Construim G_1 simetricul lui *G* în raport cu *AB* și H_1 simetricul lui *H* în raport cu *AC*. Fie $GG_1 \cap HH_1=\{P\}$. Demonstrați că :

a) Punctele G_1, F, E, H_1 sunt coliniare.

b) $\Delta PG_1H_1 \sim \Delta ABC$.

c) Determinați măsurile unghiurilor $\hat{B}$ și $\hat{C}$ astfel încât $\Delta PG_1H_1 \equiv \Delta ABC$.

Barem

a)

Construcție corectă figură **1 p**

AFDE dreptunghi **1 p**

$\widehat{G_1FB} \equiv \widehat{BFG} \equiv \widehat{FDB} \equiv \widehat{AFO}$ rezultă G_1, F, E coliniare

Analog F, E, H_1 **1 p**

b)

$\widehat{G_1FB} \equiv \widehat{BAD}$ rezultă $\widehat{FG_1P} \equiv \widehat{ABC}$ **1 p**

$m\left(\widehat{G_1PH_1}\right) = 90^0$, $\Delta PG_1H_1 \sim \Delta ABC$. **1 p**

c)

OD L.m în trapezul FGHE, folosind simetriile $OD = \frac{FE}{2}$ **1 p**

$G_1H_1 = 2AD$, $BC = 2AD$, AD mediană și înălțime, atunci ΔABC dreptunghic isoscel **1 p**