Barem

Clasa a VIII - a

1. Se dau funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, date prin $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + a$ și $g(x) = -\sqrt{3}x + 3a$, unde a este număr real pozitiv. Să se afle măsura unghiului dintre reprezentările grafice ale celor două funcții.

Soluție

$G_f \cap Ox = G_g \cap Ox = A(a\sqrt{3}, 0)$…….2p

$G_f \cap Oy = B(0, a), G_g \cap Oy = C(0,3a)$ …………….2p

$m(\widehat{OAB}) = 30^0, m(\widehat{OAC}) = 60^0$ …………………..2p

$m(\widehat{CAB}) = 30^0$…………………..1p

2. Determinați numerele raționale pozitive x și y pentru care $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Soluție

Din relația dată, obținem $x + y + 2\sqrt{xy} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2$ ……..3p

Atunci $\sqrt{2x} + \sqrt{2y} = \sqrt{3} + 1$…………….1p

$x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2x = 3, 2y = 1$ sau $2x = 1, 2y = 3$…………….2p

Finalizare 1p

3. Fie ABCDA'B'C'D' paralelipiped dreptunghic cu AB=x, BC=2x, AA'=3x, iar M și N mijloacele segmentelor CC' și BC.

a) Calculați aria secțiunii determinate de planul (MND') în paralelipiped.
b) Determinați măsura unghiului diedru dintre planele (MND') și (ABC).

Rezolvare și barem

a) Determinarea sectiunii …………………………………..……..2p
Determinarea ariei ……………………………………………..…2p
b) Identificarea unghiului plan corespunzator diedruui ………..….2p
Aflarea unei functii trigonometrice a unghiului diedru ………..1p

4. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea:

$$10 \cdot \left(\frac{\overline{ab}}{c} + \frac{\overline{ac}}{b} + 1 \right) = 9 \cdot \frac{c}{b} + 217$$

Rezolvare și barem:

$10 \cdot \left(\frac{\overline{ab}}{c} + \frac{\overline{ac}}{b} + 1 \right) = 9 \cdot \frac{c}{b} + 217 \Leftrightarrow \frac{10\overline{ab}}{c} + \frac{10\overline{ac}}{b} + 10 - \frac{9c}{b} = 217$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{abc}-c}{c} + \frac{100a+10c+10b-9c}{b} = 217 \Leftrightarrow \frac{\overline{abc}}{c} + \frac{\overline{abc}}{b} = 218$ 3p

De unde $\overline{abc}(b+c) = 109 \cdot 2 \cdot b \cdot c$. 109 este prim, deci $\overline{abc}$ este multiplu de 109.

$\overline{abc} \in \{109, 218, 327, 436, 545, 654, 763, 872, 981\}$… … … … … … … … … … … … … … 2p

436 este singurul număr care verifică relația 2p