ŞCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU„ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamţ
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN NEAMŢ

Concurs Regional de Matematică " Matematica pentru toți "

Ediția a VI – a

29.02.2020

Clasa a VII- a

Varianta 1

1. Să se arate că numărul:
$$N=\left[2021\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2021}\right)\right]+1$$
este suma primelor 2021 numere naturale nenule.

2. Demonstrați inegalitatea: $\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}}+\sqrt{\frac{y(z+x)}{3}}+\sqrt{\frac{z(x+y)}{3}}\leq\frac{5}{6}(x+y+z), \quad x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$

Generalizare.

3. Fie A și B două puncte situate pe cercul $\mathcal{C}(O,r)$ astfel încât $\widehat{AB}>90^{\circ}$ ($\widehat{AB}$ este arc mic). Perpendiculara în O pe OA intersectează dreapta AB în C și tangenta în B la cercul $\mathcal{C}(O,r)$ în D. Arătați că DB≡DC .
4. Trapezul ABCD are baza mare AB, O este punctul de intersecție al diagonalelor lui iar D' este simetricul lui D față de O. Demonstrați că:
   a) Dacă $\sphericalangle ACD\equiv\sphericalangle BDC$, atunci ABCD este trapez isoscel.
   b) Dacă $AC\perp BD$ și $AD'\perp BC$, atunci ABCD este trapez isoscel.

ŞCOALA GIMNAZIALĂ "MIHAI EMINESCU,,ROMAN
Strada Mihai Eminescu nr.27 loc. Roman, jud. Neamţ
Tel – 0233 744 599 Fax – 0233 744 591
Contabilitate – 0233 722 411
m_eminescu_roman@yahoo.com www.scmeminescuroman.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN NEAMŢ

Concurs Regional de Matematică " Matematica pentru toți "

Ediția a VI – a

29.02.2020

Clasa a VII- a

BAREM

Varianta 1

1.Să se arate că numărul

$N=\left[2021\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{2021}\right)\right]+1$ este suma primelor 2021 numere naturale nenule.

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\dots\cdot\frac{2022}{2021}=\frac{2022}{2}$ ……………………………………………………….3p

$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\frac{1}{2021}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\dots\cdot\frac{2019}{2021}=\frac{1}{2021}$……………………………………………………….3p

Finalizare………1p

2. Demonstrați inegalitatea $\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}}+\sqrt{\frac{y(z+x)}{3}}+\sqrt{\frac{z(x+y)}{3}}\leq\frac{5}{6}(x+y+z), \quad x,y,z\in\mathbb{R}_+^*$

$\sqrt{\frac{x(y+z)}{3}}\leq\frac{x+\frac{y+z}{3}}{2}=\frac{3x+y+z}{6}$ ……………………………………………………………………………….1p

$\sqrt{\frac{y(z+x)}{3}}\leq\frac{y+\frac{z+x}{3}}{2}=\frac{3y+x+z}{6}$ …………………………………………………………………………………….1p

$\sqrt{\frac{z(x+y)}{3}} \leq \frac{z+\frac{x+y}{3}}{2} = \frac{3z+x+y}{6}$ 1p

Finalizare...1p

Generalizare $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{x_{i}\cdot(x_1+\cdots+x_{i-1})+x_{i+1}+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{(2n-1)(x_1+\cdots+x_n)}{2n}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}$ 3p

3. Fie A și B două puncte situate pe cercul $\mathcal{C}(O,r)$ astfel încât $\widehat{AB} > 90^\circ$ ($\widehat{AB}$ este arc mic). Perpendiculara în O pe OA intersectează dreapta AB în C și tangenta în B la cercul $\mathcal{C}(O,r)$ în D. Arătați că DB≡DC .

Fie E și F intersecțiile dreptei OC cu cercul $\mathcal{C}(O,r)$ (E $\in CD$).

$AO \perp EF \implies \widehat{AE} = \widehat{AF} = 90^\circ$ și $\widehat{AF} = \sphericalangle AOF$..2p

$\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBA = \frac{\sphericalangle BEA}{2} = \frac{\widehat{BE}+\widehat{AE}}{2}$ 2p

$\sphericalangle DBC = \frac{\widehat{BE}+\widehat{AF}}{2}$ 2p

Deci $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB \Rightarrow DB = DC$ 1p

4. Trapezul ABCD are baza mare AB, O este punctul de intersecție al diagonalelor lui iar D' este simetricul lui D față de O. Demonstrați că:

a) Dacă $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, atunci ABCD este trapez isoscel.

b) Dacă $AC \perp BD$ și $AD' \perp BC$, atunci ABCD este trapez isoscel.

a)$\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ rezultă ΔOCD isoscel, de unde OC≡ OD (1)
Deoarece $AB \parallel CD$ avem că $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC$ și $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne) 1p

Cum $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$ rezultă ΔOABeste isoscel și OA≡ OB (2)..1p

Din (1)și (2) rezultă că OC+OA=OD+OB și atunci AC=BD, iar trapezul ABCD este isoscel...........1p

b) In ΔABC, BO și AE sunt înălțimi ($AD' \cap BC = \{E\}$), $\implies D'$ este ortocentrul lui și deci $CD' \perp AB$

$AB \parallel CD \implies CD' \perp CD$, deci $\Delta CDD'$-dreptunghic în C 2p

CO –mediana coresp. ipotenuzei $DD' \implies CO = \frac{DD'}{2} = DO$, deci D' este simetricul lui D față de O

Din CO=DO $\implies \Delta OCD$ – isoscel și $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BDC$, deci ABCD este trapez isoscel 2p