Varianta 1

1. a) Se consideră numerele raționale x,y,z astfel încât $xy + yz + zx = 2020$.

Arătați că numărul A= $\sqrt{(2020+x^2)(2020+y^2)(2020+z^2)}$ este număr rațional.

b) Determinați numerele reale pozitive a și b, cu $a+b\leq 3$, pentru care

$\sqrt{ab}+\sqrt{3-a-b}=2$ (Gazeta matematică)

2. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a = 13- 2\sqrt{bc}$, $b = 2\sqrt{ac} - 11$, $c = 2\sqrt{ab} - 2$
   Stabiliți dacă numerele a,b,c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm cu M,N,P mijloacele muchiilor AB, $B'C'$ respectiv DD'. Aflați sinusul unghiului format de dreapta CM. și planul (MNP), precum și sinusul unghiului format de planele (MNP) și (MNC).

4. Se consideră ΔABC cu $[AB]\equiv[AC]$ și $m(\widehat{BAC})\leq 90^0$. Fie un punct T în exteriorul planului (Abc), astfel încât planele (ABC) și (BTC) să fie perpendiculare, iar proiecția punctului T pe BC să aparțină segmentului (BC). Construim $TM\perp AB$, $M\in AB$ și $TN\perp AC$, $N\in AC$. Arătați că $m(\measuredangle BAC)=90^0$ dacă și numai dacă $AM+AN=BM+CN$.

Barem

1. a) Se consideră numerele raționale x,y,z astfel încât $xy + yz + zx = 2020$.

Arătați că numărul A= $\sqrt{(2020+x^2)(2020+y^2)(2020+z^2)}$ este număr rațional.

b) Determinați numerele reale pozitive a și b, cu $a+b\leq 3$, pentru care

Soluție:

a) Avem $2020 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 = y(x+z) + x(x+z) = (x+z)(x+y)$.....................2p

Analog obținem $2020 + y^2 = (y+x)(y+z)$ și $2020 + z^2 = (z+x)(z+y)$............................1p

Atunci $\sqrt{(2020+x^2)(2020+y^2)(2020+z^2)} = |(x+y)(y+z)(z+x)|$.................1p

b) Dacă $\sqrt{ab} + \sqrt{3-a-b} = 2$, atunci $\sqrt{3-a-b} = 2 - \sqrt{ab}$. După ridicare la pătrat și grupare convenabilă a termenilor, obținem $(\sqrt{ab} - 1)^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$.......2p
În final avem a=b=1 și verificare..1p

2. Fie a,b,c numere reale pozitive astfel încât $a = 13 - 2\sqrt{bc}$, $b = 2\sqrt{ac} - 11$, $c = 2\sqrt{ab} - 2$
Stabiliți dacă numerele a,b,c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.
Soluție:
Adunăm cele trei relații și obținem: $a+b+c = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc}$.........................1p
Atunci $(\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c})^2 = 0$, de unde $\sqrt{a} = \sqrt{b} + \sqrt{c}$...2p
Ridicăm relația la pătrat și cum $b+c+2\sqrt{bc} > b+c$, deducem că $a > b+c$...........3p
Atunci a,b,c nu pot fi lungimile laturilor unui triunghi..1p

3. În cubul ABCDA′B′C′D′ notăm cu M,N,P mijloacele muchiilor AB, B′C′ respectiv DD′. Aflați sinusul unghiului format de dreapta CM. și planul (MNP), precum și sinusul unghiului format de planele (MNP) și (MNC).

Soluție:
Fie AB =2a. Atunci $CM=CN=CP=a\sqrt{5}$ și $MN=NP=MP=a\sqrt{6}$.................................1p
$CO\perp (MNP)$ unde O este centrul cercului circumscris triunghiului echilateral MNP, unghiul căutat fiind CMO...1p
$OM = a\sqrt{2}$ și $CO= a\sqrt{3}$ (după aplicarea teoremei lui Pitagora în triunghiul COM......1p
Atunci $\sin \measuredangle CMO=\frac{\sqrt{15}}{5}$..1p.
$(MNP)\cap(MNC)=MN$, $CT\perp MN$ și $CO\perp (MNP)$, rezultă $TO\perp MN$ *și* unghiul căutat este $\measuredangle CTO$...2p
În final, $\sin \measuredangle CTO=\frac{\sqrt{42}}{7}$...1p

4. Se consideră ΔABC cu [AB]≡[AC] și m($\widehat{BAC}$) ≤90^0 . Fie un punct T în exteriorul planului (ABC), astfel încât planele (ABC) și (BTC) să fie perpendiculare, iar proiecția punctului T pe BC să aparțină segmentului (BC). Construim TM⊥AB, M∈ AB și TN⊥AC, N∈ AC. Arătați că m(∡BAC)=90^0 dacă și numai dacă AM+AN=BM+CN.

Soluție

⇒Fie TP⊥ $BC, P \in (BC) \Rightarrow TP \perp (ABC) \Rightarrow PM \perp AB$ și $PN \perp AC$...........1p

Atunci m(∡A)=90^0 ⇒ AMPN dreptunghi ⇒

$\mathrm{AM} + \mathrm{AN} = \mathrm{PM} + \mathrm{PN}$......1p

ΔMBP șiΔPNC dreptunghice isoscele, deci $\mathrm{PM} \equiv \mathrm{BM}$și $\mathrm{PN} \equiv \mathrm{CN}$,

deci AM+AN=BM+CN. 1p

⇐ AM+AN=BM+CN ⇒ AM+AN+BM+CN=2AB⇒ AM+AN=AB........1p

$MB = PB \cdot cosB$ și $NC = CP \cdot cosC$ 1p

∡B=∡C, deci MB+NC=(PB+CP) $\cdot$ $cosB$, deci cosB=$\frac{AB}{BC}$......1p

Fie AD⊥ BC , D∈ (BC) ⇒$2\,cosB = \frac{2BD}{AB} = \frac{BC}{AB}$,

deci $BC^2 = 2AB^2 = AB^2 + AC^2$.......1p